# EXTENSIONS DE H-OBJETS

Georges Hoff

# EXTENSIONS DE H-OBJETS

**Georges Hoff**

LAGA (UMR 7539 du CNRS)
Institut Galilée, Avenue J.B.Clément, F−93430 Villetaneuse
courriel : hoff@math.univ-paris13.fr

*Dans une catégorie avec homotopie, on définit la notion de H-objet. Les notions de quotient et de noyau mènent à la définition des extensions de H-objets.*

MSC (2000): primary 18G55, 55U35, 18D30, secondary 18D35, 18A20, 55P45.

## 1 Catégories avec homotopie.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Notons $\mathcal{C}(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$ l'ensemble des morphismes de l'objet $\mathbf{C}$ vers l'objet $\mathbf{C}'$.

**Définition 1.1.** Une **homotopie** dans $\mathcal{C}$ est la donnée, pour chaque ensemble $\mathcal{C}(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$ d'une relation d'équivalence $\simeq$ telle que

$$(\mathbf{1}) \quad f \simeq f' \quad \Rightarrow \quad gf \simeq gf' \ \text{ et } \ fh \simeq f'h$$

pour tous morphismes $g$ et $h$ tels que les composés ci-dessus sont définis.

Nous prenons ici la définition la plus simple d'une situation d'homotopie. Dans la pratique, une telle situation peut être donnée via une catégorie de fractions, un foncteur cylindre, un foncteur chemin dans $\mathcal{C}$ (cf. [8]) ou un enrichissement de $\mathcal{C}$ par des 2-cellules (cf. [4]). Le dernier cas permet d'envisager des généralisations telles que la théorie de l'homotopie dirigée ([5]).

**Proposition 1.2.** Se donner une catégorie avec homotopie est exactement se donner une catégorie enrichie par les groupoïdes.

**Preuve.** Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec homotopie, on définit une 2-cellule $f \to f'$ lorsque $f \simeq f'$. Les propriétés de l'équivalence nous assurent que chaque $\mathcal{C}(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$ est un groupoïde. La condition (1) de 1.1. permet de satisfaire les axiomes des catégories enrichies ([12]). Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie enrichie par les groupoïdes, la relation " $f \simeq f'$ si et seulement si il existe une 2-cellule $f \to f'$ " est une relation d'équivalence qui satisfait la condition (1) de 1.1.

Ceci permet, en particulier, d'envisager des homotopies différentes pour une même relation $f \simeq f'$.

**Notation 1.3.** L'ensemble quotient $\mathcal{C}(\mathbf{C}, \mathbf{C}')/\simeq$ sera noté $[\mathbf{C}, \mathbf{C}']$ et la classe d'un $f \in \mathcal{C}(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$ sera notée $f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Avec (1) de 1.1. on a ainsi une nouvelle catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes de $\mathcal{C}$.

**Notation 1.4.** Etant donné un morphisme $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$, on a une application $f_* : [\mathbf{A}, \mathbf{C}] \to [\mathbf{A}, \mathbf{C}']$, définie par la composition, pour tout objet $\mathbf{A}$.

**Définition 1.5.** On dira que $f$ est un **mono homotopique** (resp. **épi homotopique**) si $f_*$ est une injection (resp. surjection).

# 2 La catégorie des H-objets.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec homotopie munie d'un produit $\times$ et d'un objet final $\mathbf{T}$.

**Définition 2.1.** Un **H-objet** de $\mathcal{C}$ est un objet $\mathbf{C}$ muni de morphismes $e : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ et $m : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tels que

$$(\mathbf{2}) \qquad m(e \times 1_{\mathbf{C}}) \simeq 1_{\mathbf{C}} \simeq m(1_{\mathbf{C}} \times e),$$

un **H-morphisme** $c : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ entre H-objets est un morphisme $c$ tel que

$$(\mathbf{3}) \quad cm \simeq m'(c \times c) \ \text{ et } \ ce \simeq e'.$$

**Exemples 2.2.** Les groupes catégoriques ([1], [13]), les H-espaces ([15], [11]) et les H-catégories ([7]) sont des H-objets. L'objet final $\mathbf{T}$ a une structure de H-objet triviale.

**Définition 2.3.** Les H-objets et les H-morphismes constituent une **sous-catégorie** H$\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$. Le morphisme composé $\mathbf{C} \to \mathbf{T} \xrightarrow{e'} \mathbf{C}'$ sera noté 0.

**Proposition 2.4.** Pour tout objet $\mathbf{A}$ et tout H-objet $\mathbf{C}$ de $\mathcal{C}$, le morphisme $m$ définit une loi de composition dans les ensembles $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ et $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$. Nous la noterons $+$, bien qu'elle ne soit pas abelienne en général. Le morphisme composé $0 : \mathbf{A} \to \mathbf{T} \xrightarrow{e} \mathbf{C}$ est un élément neutre pour la loi de $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$.

**Remarque 2.5.** Si le H-objet $\mathbf{C}$ est H-associatif, i.e. $m(m \times 1_{\mathbf{C}}) \simeq m(1_{\mathbf{C}} \times m) : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$, alors $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ est un monoïde, i.e. une petite catégorie à un objet.

**Définition 2.6.** Un H-objet $\mathbf{C}$ est dit **différenciant** si pour tout objet $\mathbf{A}$ et tout couple $f, g \in [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ il existe un unique $d_{f,g} \in [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ tel que $d_{f,g} + g = f$.

Cette propriété, qui est évidente si $\mathbf{C}$ est un H-groupe (i.e. est H-associatif et à H-inverse $i : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ avec $m(i, 1_{\mathbf{C}}) \simeq m(1_{\mathbf{C}}, i) \simeq 0$), est aussi vraie quand, dans $\mathcal{T}op$, on travaille avec des espaces ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe (cf. [15] et [11]).

# 3 Quotient et noyau.

Un épimorphisme de groupes abéliens est un homomorphisme qui admet une section ensembliste. De manière semblable on a la définition suivante.

**Définition 3.1.** Un H-morphisme $p : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ est un **H-quotient** s'il existe un morphisme $s : \mathbf{C} \to \mathbf{H}$ tel que $ps \simeq 1_{\mathbf{C}}$.

**Proposition 3.2.** Un H-quotient est un épi homotopique.

**Preuve.** Pour tout $f \in [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$, on a $sf \in [\mathbf{A}, \mathbf{H}]$ telque $p_*(sf) = psf = f$ dans $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$.

**Définition 3.3.** Un **H-noyau** d'un H-morphisme $p : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ est un H-morphisme $i : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ mono homotopique tel que si $h$ et $h' : \mathbf{A} \to \mathbf{H}$ sont des morphismes on a

$(\star)$ $ph \simeq ph' \;\Leftrightarrow\; \exists k : \mathbf{A} \to \mathbf{K}$ , unique à homotopie près, tel que $h' \simeq ik{+}h$.

**Proposition 3.4.** Si $i$ est un H-noyau de $p$, on a $pi \simeq 0$.

**Preuve.** On a $i \simeq i + 0$ et tout $k' : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ tel que $i \simeq ik + 0 \simeq ik$ est tel que $k' \simeq 1_{\mathbf{K}}$ car $i$ est un mono homotopique. De par $(\star)$ de 3.3. avec $\mathbf{A} = \mathbf{K}$ et $k = 1_{\mathbf{K}}$, on a $pi \simeq p0$ et comme p est un H-morphisme, on a $p0 \simeq 0$ d'où $pi \simeq 0$.

La définition suivante a été considérée par [3] et [4] qui utilise plutôt la notion de noyau homotopique standard, i.e. avec l'unicité stricte du morphisme $k$.

**Définition 3.5.** Un **noyau homotopique** de $p$ est un H-morphisme $i : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ tel que $pi \simeq 0$ et pour tout $j : \mathbf{K}' \to \mathbf{H}$ tel que $pj \simeq 0$, il existe $k : \mathbf{K}' \to \mathbf{K}$ tel que $j \simeq ik$, le morphisme $k$ étant unique à homotopie près.

**Proposition 3.6.** Un H-noyau est un noyau homotopique.

**Preuve.** En 3.4. on amontré que l'on a $pi \simeq 0$. Si on a $pj \simeq 0$, alors $pj \simeq p0$. De par $(\star)$ de 3.3 on a $k$, unique à homotopie près, tel que $j \simeq ik + 0 \simeq ik$.

**Proposition 3.7.** Si $\mathbf{H}$ et $\mathbf{C}$ sont différenciants, un noyau homotopique de $p : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ est un H-noyau.

**Preuve.** Montrons d'abord que $i$ est un mono homotopique. Supposons que l'on a $ia \simeq ib$, alors on a $pia \simeq 0a \simeq 0$. La définition 3.4. nous dit alors qu'il existe $k$ tel que $ik \simeq ia$. L'unicité à homotopie près de $k$ implique $k \simeq a$ et $k \simeq b$ d'où $a \simeq b$.
Si on a $ph \simeq ph'$ ceci équivaut à $p_*(h) = p_*(h')$. Comme $\mathbf{H}$ est différenciant, on a $h = d_{h,h'} + h'$ dans $[\mathbf{A}, \mathbf{H}]$ et $p_*(h) = p_*(d_{h,h'}) + p_*(h')$ et l'unicité de la différence dans $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ implique $p_*(d_{h,h'}) = 0$. De par la définition du noyau homotopique, on a alors $d_{h,h'} \simeq ik$ et $h \simeq ik + h'$ avec $k$ unique à homotopie près car $i$ est un mono homotopique.

# 4 Extensions de H-objets

La généralisation de la théorie de Schreier ([14]) s'est présentée de manière récurrente dans les dernières décennies du vingtième siècle. Dans chaque cas, une extension est la donnée d'un "quotient" et de son "noyau". Pour une notion stricte, il y a les extensions de catégories que nous avons étudiées dans une tétralogie d'articles (dont [9]). Un aspect homotopique apparaît dans les travaux sur les groupes catégoriques ([2], [1], [13]). On a alors un lien avec nos travaux en homotopie. Tout ceci est décrit dans [10].

**Définition 4.1.** Une **extension** de H-objets (de $\mathbf{C}$ par $\mathbf{K}$) est la donnée de

$$\mathbf{E}: \ \mathbf{K} \stackrel{i}{\to} \mathbf{H} \stackrel{p}{\to} \mathbf{C}$$

où $p$ est un H-quotient et $i$ est un H-noyau de $p$.

**Proposition 4.2.** $\mathbf{E}: \ \mathbf{K} \stackrel{i}{\to} \mathbf{H} \stackrel{p}{\to} \mathbf{C}$ est une extension de H-objets si et seulement si pour tout objet $\mathbf{A}$ de $\mathcal{C}$, la suite d'applications

$$0 \to [\mathbf{A}, \mathbf{K}] \stackrel{i_*}{\to} [\mathbf{A}, \mathbf{H}] \stackrel{p_*}{\to} [\mathbf{A}, \mathbf{C}] \to 0$$

est exacte en ce sens que $i_*$ est injective, $p_*$ est surjective et si on a $p_*(h) = p_*(h')$, alors il existe un unique $k \in [\mathbf{A}, \mathbf{K}]$ tel que $h' = i_*(k) + h$.

**Preuve.** ($\Rightarrow$) Le morphisme $i$ étant un mono homotopique, l'application $i_*$ est injective. Le morphisme $p$ ayant une section, l'application $p_*$ est surjective. La propriété universelle ($\star$) du H-noyau termine la preuve.
($\Leftarrow$) $i_*$ étant injective, $i$ est un mono homotopique. L'exactitude de la suite d'applications de 4.2. donne que $i$ est un H-noyau de $p$. Comme $p_*: \ [\mathbf{C}, \mathbf{H}] \to [\mathbf{C}, \mathbf{C}]$ est surjective (on prend dans l'énoncé $\mathbf{A} = \mathbf{C}$), il existe un morphisme $s: \ \mathbf{C} \to \mathbf{H}$ tel que $p_*(s) \simeq 1_{\mathbf{C}}$ or $p_*(s) = ps$ et $s$ est une section de $p$.

**Exemples 4.3.** On reconnaît ici le type d'extensions de H-espaces envisagé par [11]. Suivant une démonstration de celui-ci, on verra que si $\mathbf{K}$ et $\mathbf{C}$ sont des H-objets, on a une extension de H-objets $\mathbf{K} \stackrel{(1,0)}{\to} \mathbf{K} \times \mathbf{C} \stackrel{p}{\to} \mathbf{C}$.

Comme dans la théorie de Schreier, on peut se poser la question de la classification, par de la cohomologie (les sections de p engendrant des cocycles comme dans [6]) ou pas. Le contexte est alors déterminant et l'associativité (comme on le verra en 4.4.) ou la commutativité (comme dans [11], [1] et nos articles) jouent un rôle important. Sous certaines conditions, [11] a classifié certaines extensions de H-espaces par un quotient de $[\mathbf{C} \wedge \mathbf{C}, \mathbf{K}]$ où $\wedge$ est le smash produit $\mathbf{C} \wedge \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{C}/\mathbf{C} \vee \mathbf{C}$ avec $\mathbf{C} \vee \mathbf{C} = \{(x, y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C},\ x = e \text{ ou } y = e\}$. Dans [13], pour un cadre très général, on trouve une formulation, concernant les groupes catégoriques, qui peut être plus maniable que la cohomologie.

**Proposition 4.4.** Si on suppose que les H-objets $\mathbf{K}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{C}$ sont H-associatifs, on a une extension de H-objets

$$\mathbf{E} :\ \mathbf{K} \xrightarrow{i} \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$$

si et seulement si, pour chaque objet $\mathbf{A}$ de $\mathcal{C}$,

$$\mathbf{E}_* :\ [\mathbf{A}, \mathbf{K}] \xrightarrow{i_*} [\mathbf{A}, \mathbf{H}] \xrightarrow{p_*} [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$$

est une extension de (petites) catégories (à un objet).

**Preuve.** Puisque les H-objets sont H-associatifs, les objets de la deuxième suite sont des monoïdes i.e. des petites catégories à un objet, les applications étant des foncteurs. L'injectivité de $i_*$ nous dit que c'est un foncteur fidèle. La surjectivité de $p_*$ nous dit que c'est un foncteur quotient (i.e. plein et bijectif sur les objets). L'exactitude en $[\mathbf{A}, \mathbf{H}]$ décrite en 4.2. est exactement la condition $(\star)$ de la définition des extensions de catégories de [9]. Se donner une suite exacte comme en 4.2. est donc exactement se donner une extension de catégories et 4.2. nous dit que c'est équivalent au fait que $\mathbf{K} \xrightarrow{i} \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ est une extension de H-objets.

## Références


[1] D. Bourn, E.M. Vitale, *Extensions of symmetric cat-groups*, Homology, Homotopy and Appl. 4, 2002, 103-162.

[2] L. Breen, *Théorie de Schreier supérieure*, Ann. Sc. Ec. Normale Sup. 25, 1992, 465-514.

[3] M. Grandis, *On the categorical foundations of homological and homotopical algebra*, Cahiers Top. Géom. Diff. Catég. 33, 1992, 135-175.

[4] M. Grandis, *Homotopical algebra in homotopical categories*, Appl. Categ. Struct. 2, 1994, 351-406.

[5] M. Grandis, *Directed homotopy I*, Cahiers Top. Géom. Diff. Catég. 44, 2003, 281-316.

[6] G. Hoff, *On the cohomology of categories*, Rend. Mat. 7, 1974, 169-192.

[7] G. Hoff, *Introduction à l'homotopie dans Cat*, Esquisses Mathématiques 23, Univ. Paris-7, 1975.

[8] G. Hoff, *Aspects de l'homotopie concrête*, Communications Fac. Sc. Univ. Ankara 32, 1983, 13-24.

[9] G. Hoff, *Cohomologies et extensions de catégories*, Math. Scand. 74, 1994, 191-207.

[10] G. Hoff, *Catégories, (co)homologies et homotopies*, <http://math.univ-paris13.fr/∼hoff/cchh.pdf>, 2007.

[11] H. Kachi, *Central extensions of H-spaces*, Kyushu J. Math. 50, 1996, 249-262.

[12] G.M. Kelly, *Basic concepts of enriched categories*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 64, 1982.

[13] A. Rousseau, *Bicatégories monoïdales et extensions de gr-catégories*, Homology and Appl. 5, 2003, 437-547.

[14] O. Schreier, *Über die Erweiterungen von Gruppen I*, Monatshefte Math. Phys. 34, 1926, 165-180.

[15] J. Stasheff, *H-spaces from a homotopy point of view*, Springer Lecture Notes 161, 1970.

Villetaneuse, Saint-Denis, 2011.